Rozkłady
Przegląd

Tadeusz M.Molenda
Instytut Fizyki, Uniwersytet Szczeciński

Międzynarodowa Norma Oceny Niepewności Pomiaru (Guide to Expression of Uncertainty in Measurements-Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna ISO)

ANALIZA NIEPEWNOŚCI POMIARU

***Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1995.**

***Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.**

***The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty*, http://physics.nist.gov/cuu**

H. Szydłowski, Niepewności *w pomiarach. Międzynarodowe standardy w praktyce*. Wyd. Naukowe UAM, Poznań 2001.

A. Zięba, Analiza danych w naukach ścisłych i technicznych. PWN, Warszawa, 2014.

P. Bilski, M. Dobies, A. Kozak, M. Makrocka-Rydzyk:
***Materiały do ćwiczeń ze wstępu do pracowni fizycznej. Normy ISO i matematyka w laboratorium*. Wyd. Naukowe UAM; 2014.**

R. Janiczek *Metody oceny niepewności pomiarów.* Wyd. Pracowni Komp. J. Skalmierskiego, Gliwice 2008.

Podział błędów pomiaru (przypomnienie)

Wyniki pomiarów podlegają pewnym prawidłowościom, tzw. rozkładom typowym dla zmiennej losowej. Z tego względu błędy dzielimy na:

- **Błędy przypadkowe** (zwane też losowymi), które podlegają prawom statystyki i rachunku prawdopodobieństwa, wynikają z wielu losowych przyczynków i nie dają się wyeliminować (zmieniają się w sposób nieprzewidziany).
- **Błędy systematyczne**, które można ograniczyć udoskonalając pomiar. (Cechą charakterystyczną jest ich powtarzanie się przy wielu pomiarach tej samej wielkości w stałych warunkach pomiaru.)
- **Błąd gruby** (zwany omyłką) – różni się, na ogół drastycznie, od wartości rzeczywistej, należy starć się wykryć i odrzucić.
- **Błędy nadmierne** – pomyłki wynikające z bardzo różnych przesłanek, niekiedy spowodowane systematycznymi nieprawidłowościami w procesie przeliczeniowym. Pomiary takie nie są w pełni wiarygodne.
- **Błąd (niepewność) graniczna dopuszczalna** – klasa dokładności, specyfikacja techniczna przyrządu
- **Błędy cyfrowych przyrządów pomiarowych**

Typy oceny niepewności wg kodyfikacji ISO

International Organization for Standarization – Przewodnik …

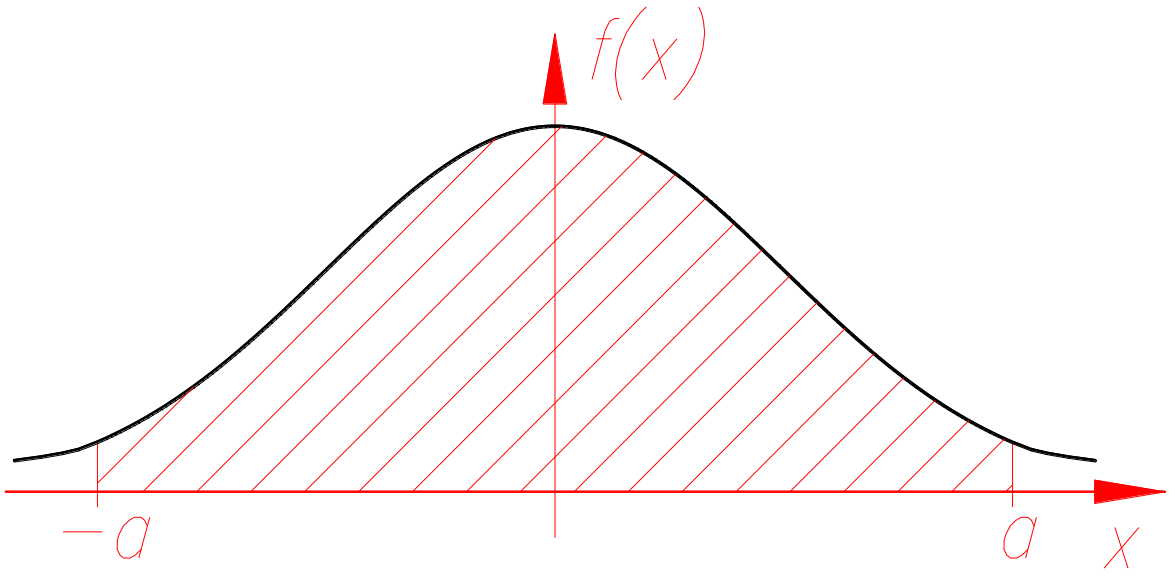
Niepewność standardowa typu A

oznaczana literą $u_A(x)$ (x – symbol wielkości mierzonej)

Metody wykorzystujące statystyczną analizę serii pomiarów:

- **wymaga odpowiednio dużej liczby powtórzeń pomiaru**
- **ma zastosowanie do błędów przypadkowych**

Błędy przypadkowe modeluje się (*model losowy*) za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa – zwykle rozkładu normalnego



Uwaga

Błędy z natury są systematyczne: określona przyczyna powoduje określony skutek

Kiedy błędy traktuje się jako przypadkowe - przykłady:

Wiadomo, że zjawisko rozszerzalności termicznej (cieplnej) powoduje błędy temperaturowe ale nie jest możliwe doprowadzenie do wyrównania temperatury w całej
objętości przedmiotu

Temperatura pomieszczenia w którym wykonuje się pomiar, temperatura przyrządu i temperatura przedmiotu ciągle się zmieniają

Spodziewając się, że błąd temperaturowy nie będzie miał istotnego wpływu na błąd pomiaru rezygnujemy z pomiaru temperatur i stosowania korekcji

Typy oceny niepewności wg kodyfikacji ISO

***International Organization for Standarization* – Przewodnik …**

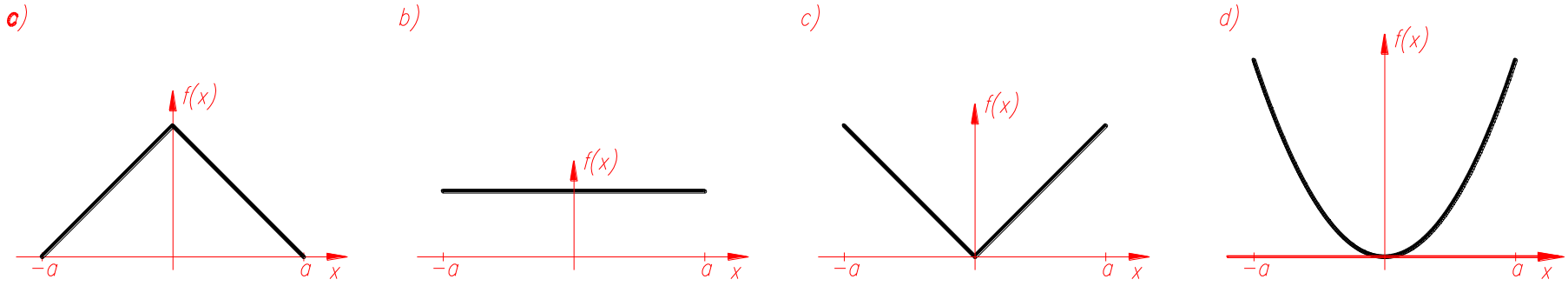
Niepewność standardowa typu B

oznaczana literą $u_B(x)$ (x – symbol wielkości mierzonej)

Opiera się na naukowym osądzie eksperymentatora wykorzystującym wszystkie informacje o pomiarze
i źródłach jego niepewności

- stosuje się gdy statystyczna analiza nie jest możliwa
- dla błędu systematycznego lub dla jednego wyniku pomiaru

Metoda B – różne rozkłady



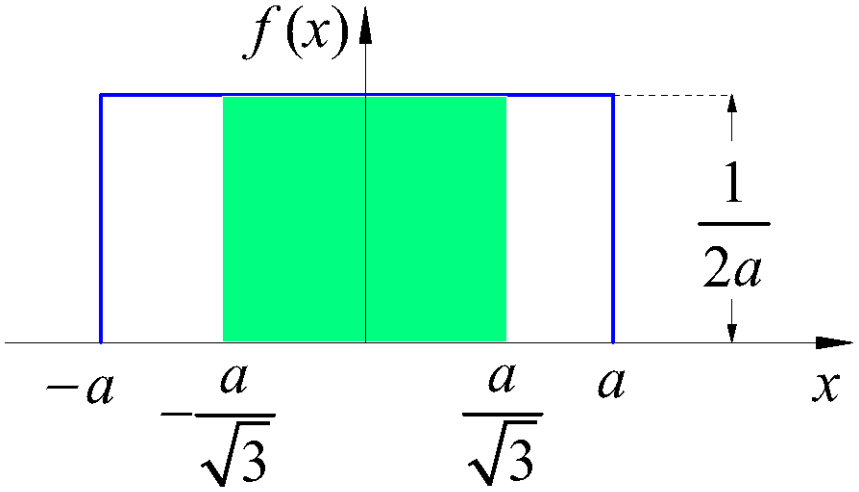
Niepewność standardowa u oblicza się według wzoru:

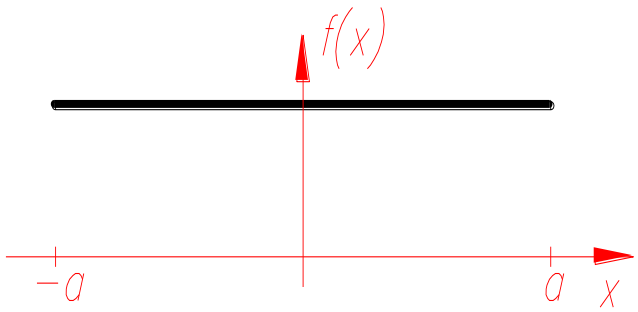
$$u = a/k$$

gdzie $1/k$ zależy od rodzaju rozkładu i wynosi:

- dla rozkładu jednostajnego – 0,58,
- dla rozkładu trójkątnego – 0,41,
- dla rozkładu antymodalnego V – 0,71,
- dla rozkładu antymodalnego U – 0,77,
- dla rozkładu trapezowego – 0,46.

Rozkład jednostajny – 0,58



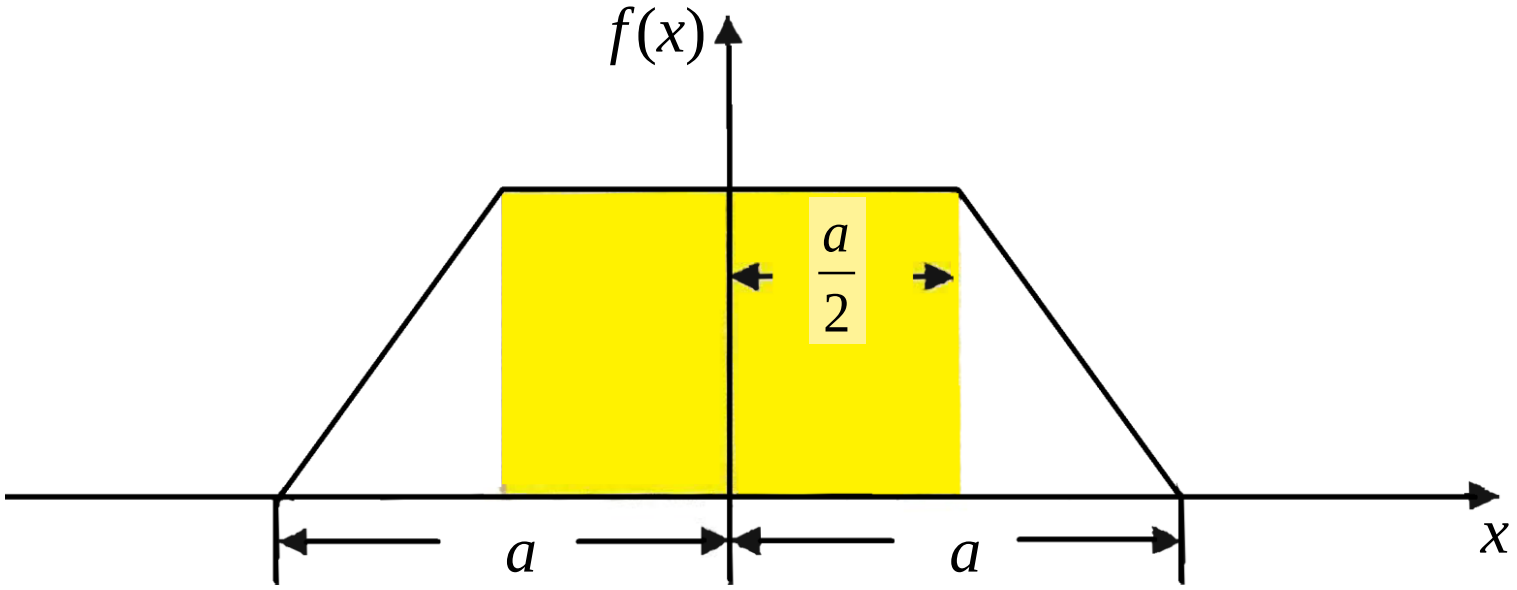


$$f(x) = \frac{1}{2a} \quad \text{dla} \quad x \in (-a, a\rangle$$

$$D^2(X) = 2\int_0^a x^2 \frac{1}{2a}\,dx = \frac{x^3}{3a}\Big|_0^a = \frac{a^2}{3}$$

$$s = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0{,}577a$$

Rozkład trapezowy – 0,46

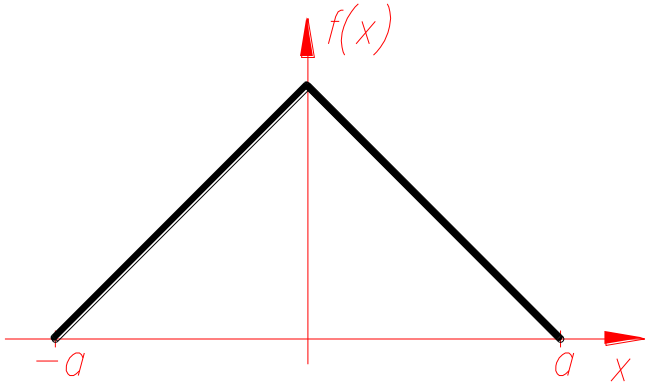


$$f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3a^2}x+\frac{4}{3a} & \text{dla} \quad x\in(-a,-\frac{a}{2})\\ \frac{4}{3a} & \text{dla} \quad x\in\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)\\ -\frac{4}{3a^2}x+\frac{4}{3a} & \text{dla} \quad x\in\left(\frac{a}{2},a\right)\end{cases}$$

$$s=a\sqrt{\frac{5}{24}}=0{,}4564a$$

Złożenie dwóch rozkładów prostokątnych o różnej szerokości daje rozkład trapezowy

Rozkład trójkątny – 0,41



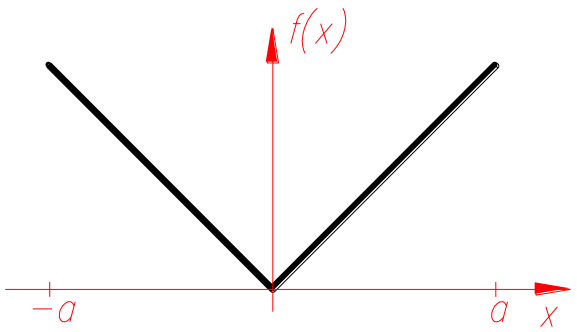
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+a}{a^2} & \text{dla} \quad x\in(-a,0\rangle \\ \dfrac{-x+a}{a^2} & \text{dla} \quad x\in\langle 0,a)\end{cases}$$

$$D^2(X)=2\int_0^a x^2\,\frac{-x+a}{a^2}\,dx=\frac{2}{a^2}\left(\frac{-x^4}{4}+\frac{ax^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^2}{6}$$

$$s=\frac{a}{\sqrt{6}}=0{,}408$$

Złożenie dwóch rozkładów prostokątnych o tej samej szerokości daje rozkład trójkątny

Rozkład antymodalny V – 0,71

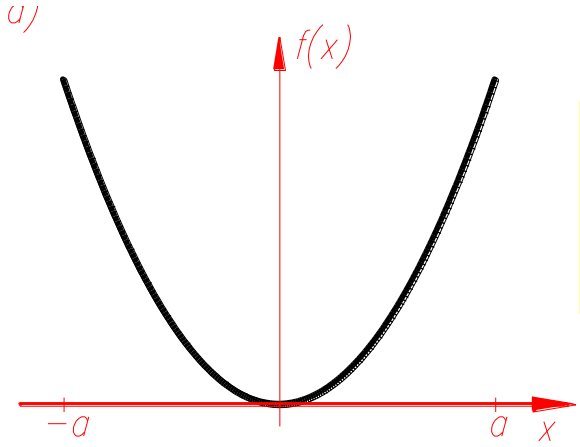


$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{a^2} & \text{dla} \quad x\in(-a,0\rangle \\ \dfrac{x}{a^2} & \text{dla} \quad x\in(0,a) \end{cases}$$

$$D^2(X)=2\int_0^a x^2\cdot\frac{x}{a^2}\,dx=\frac{2}{a^2}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^a=\frac{a^2}{2}$$

$$s=\frac{a}{\sqrt{2}}=0{,}707a$$

Rozkłady antymodalne U



$$f(x)=\frac{3x^2}{2a^3} \quad dla \quad x\in(-a,a)$$

$$s=\frac{a}{\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

$$f(x)=\frac{2x^3}{a^4} \quad dla \quad x\in(-a,a)$$

$$s=\frac{a}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \quad \text{dla} \quad x\in(-a,a)$$

$$s=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Złożenie różnych typów rozkładów

r. □ + **r. □** (równa szerokość) ⇨ **r. △** (rozkład trójkątny)

r. □ + **r. ▯** (różna szerokość) ⇨ **rozkład trapezowy**

r. □ + **r. □** + **r. □** + **r. □** (min. 4 równej szerokość) ⇨ **r. normalny**

r. □ **x 7** (min. 7, o różnej szerokości) ⇨ **rozkład normalny**

r. normalny + **r. □** (trzykrotnie węższy) ⇨ **rozkład normalny**

r. normalny + **r. normalny** ⇨ **rozkład normalny**

r. normalny + **r. □** (podobna szerokość) ⇨ **r. niesymetryczny**

(r. normalny)^2 ⇨ **rozkład niesymetryczny**

r. □ – ozn. rozkład prostokątny

Centralne twierdzenie graniczne

Suma dużej liczby zmiennych losowych (o dowolnych rozkładach) jest zmienną losową o rozkładzie normalnym.

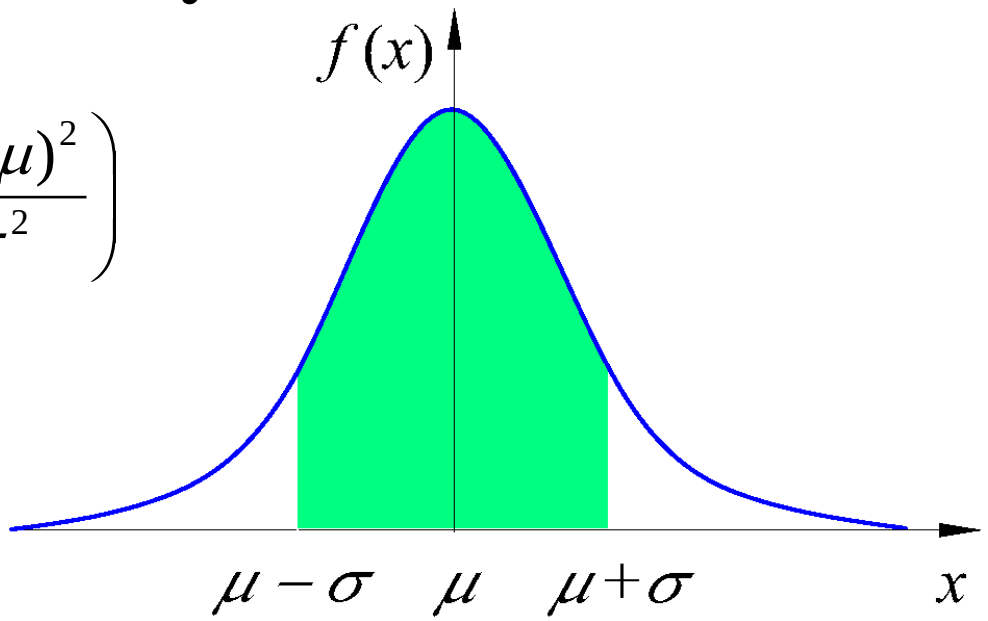
Parametr μ wynikowego rozkładu normalnego jest równy sumie wartości oczekiwanych

a parametr σ jest równy pierwiastkowi z sumy wariancji składowych zmiennych losowych

Centralne twierdzenie graniczne – wyjątkowe znaczenie rozkładu normalnego

Rozkład normalny

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



$f(x)$ - gęstość prawdopodobieństwa wystąpienia wielkości x lub jej błędu Δx podlega rozkładowi Gaussa

μ - wartością oczekiwana (może nią być średnia arytmetyczna),

σ - odchylenie standardowe,

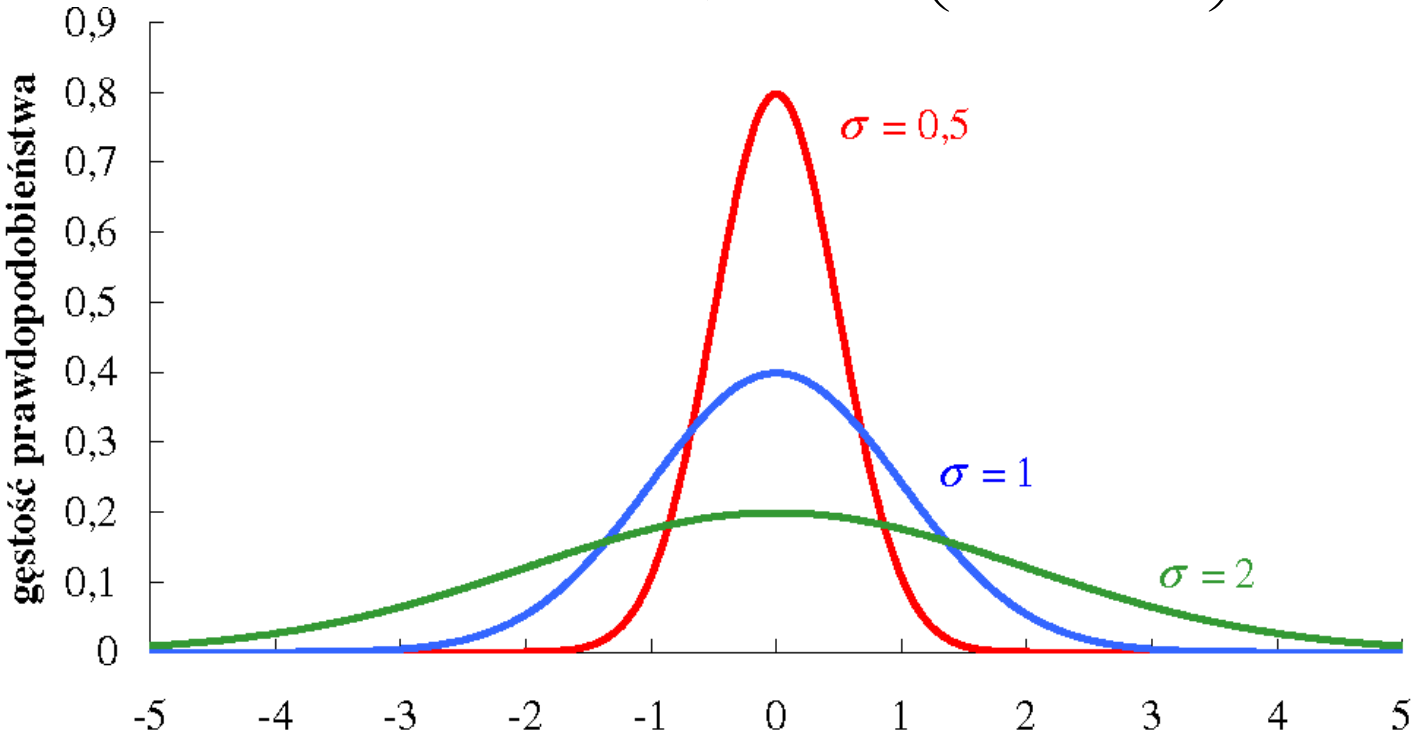
σ^2 - wariancja rozkładu

Rozkład normalny

oznaczamy też $N(x;\ \mu,\ \sigma)$

Rozkład normalny Gaussa

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

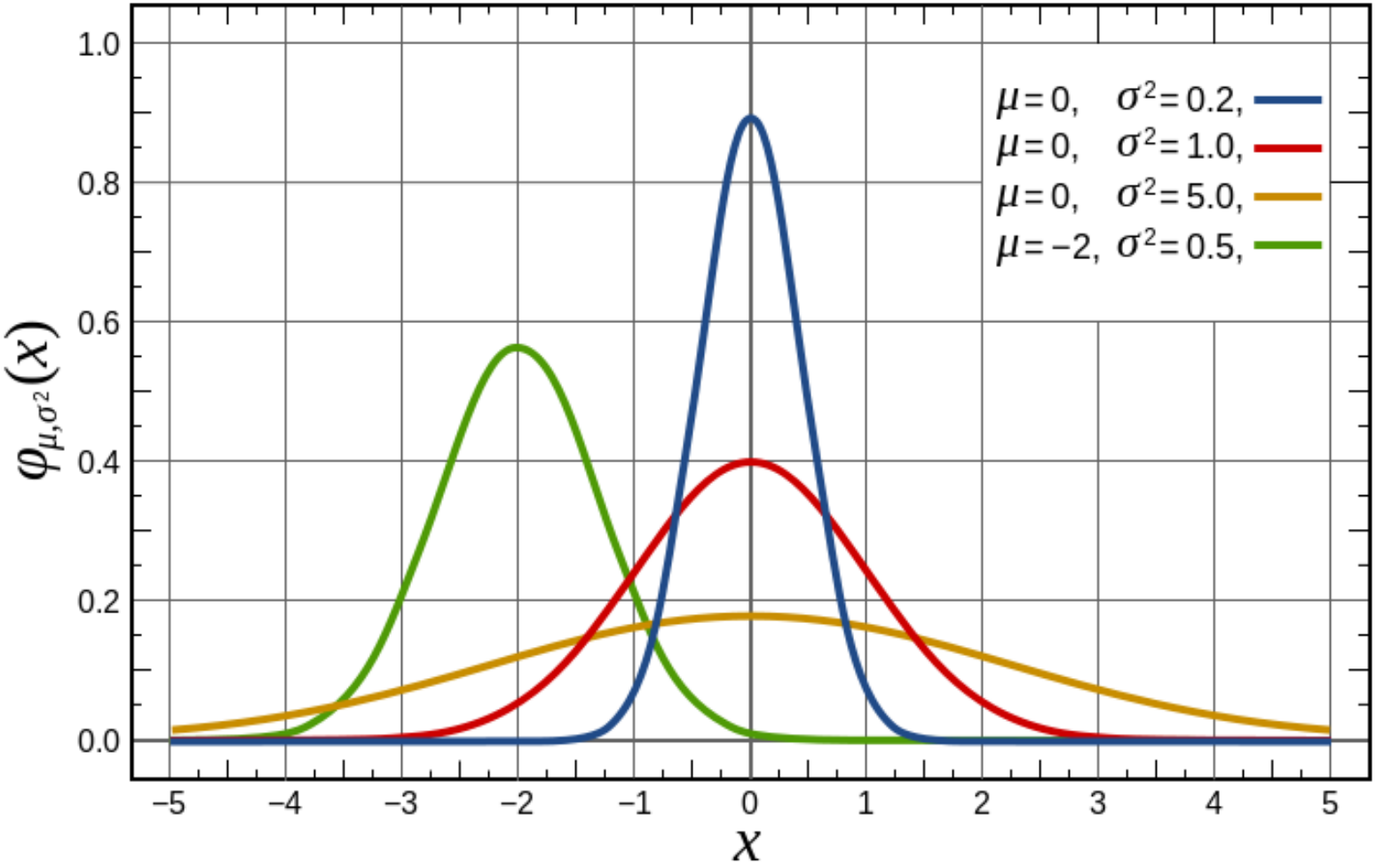


Pomiar o większym σ charakteryzuje się większym rozrzutem wyników wokół wartości średniej a zatem mniejszą precyzją

Skorzystano z: A.Majhofer *Analiza niepewności pomiarowych i pracownia wstępna*. UW. http://anpef.igf.fuw.edu.pl/

Skorzystano z: A.Majhofer *Analiza niepewności pomiarowych i pracownia wstępna*. UW. http://anpef.igf.fuw.edu.pl/zadania/wahadlo.pdf.

Rozkład normalny Gaussa



Źródło: Wikipedia

Standardowy rozkład normalny

rozkład znormalizowanyny Gaussa

jeśli $\mu = 0$ i $\sigma = 1$

(możemy dokonać podstawienia: $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$)

jego funkcja gęstości opisana jest wzorem

$$f(x;\, \mu = 0, \sigma = 1) = f_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Uwaga: Funkcje gęstości spełniają warunek unormowania do 1.

Funkcje są z tablicowane, wbudowane do arkusza kalkulacyjnego, np. Excel.

Wnioskowanie na podstawie próby
o momentach, czyli parametrach rozkładu prawdopodobieństwa
nazywamy **wnioskowaniem parametrycznym**.

Rodzaje wnioskowania parametrycznego

Wyróżnia się trzy rodzaje wnioskowania parametrycznego:

1. **Estymacja punktowa;**
2. **Estymacja przedziałowa;**
3. **Testowanie hipotez.**

Wartość prawdopodobieństwa

W celu wyznaczenia prawdopodobieństwa tego, że wartość *x* znajduje się w przedziale (x_a, x_b), można zastosować *metodę graficznego całkowania*
lub
wyznaczyć prawdopodobieństwo analitycznie
lub
skorzystać z wartości *dystrybuanty rozkładu* normalnego standaryzowanego
(tablice wartości, funkcje są z tablicowane, wbudowane do arkusza kalkulacyjnego, np. Excel).

Przedział ufności

W przypadku *estymacji przedziałowej*, na podstawie wyników z wylosowanej próby, konstruowany jest przedział liczbowy, który z określonym z góry prawdopodobieństwem pokrywa wartość parametru estymowanego. Przedział ten jest określany mianem *przedziału ufności*, natomiast prawdopodobieństwo – *poziomem (współczynnikiem) ufności*.

Poziom ufności (oznaczany dalej jako α) można zdefiniować jako prawdopodobieństwo, że skonstruowany przedział ufności zawiera wartość parametru estymowanego.

Przyjmuje się, że prawdopodobieństwo to spełnia warunek: $\alpha \geq 0{,}90$.

Istnieje określona relacja między wielkością poziomu ufności a precyzją szacowania parametru estymowanego:

im wyższy jest poziom ufności, tym mniejsza precyzja szacowania (większy błąd szacunku, większa rozpiętość przedziału ufności).

Przedział ufności

Przedziałem ufności o **współczynniku ufności** $1-\alpha$ nazywamy taki przedział (x_a, x_b), który spełnia warunek:

$$P(x_a < x < x_b) = 1-\alpha$$

Współczynnik ufności $1-\alpha$ jest wielkością, którą można interpretować w następujący sposób:
jest to prawdopodobieństwo wyznaczenia takiego przedziału, że rzeczywista wartość parametru *x* w populacji znajdzie się w tym przedziale. Im większa wartość tego współczynnika, tym szerszy przedział ufności, a więc mniejsza dokładność estymacji parametru. Im mniejsza wartość $1-\alpha$, tym większa dokładność estymacji, ale jednocześnie tym większe prawdopodobieństwo popełnienia błędu. Wybór odpowiedniego współczynnika jest więc kompromisem pomiędzy dokładnością estymacji a ryzykiem błędu.
W praktyce przyjmuje się zazwyczaj wartości: 0,99; 0,95 lub 0,90, zależnie od parametru.

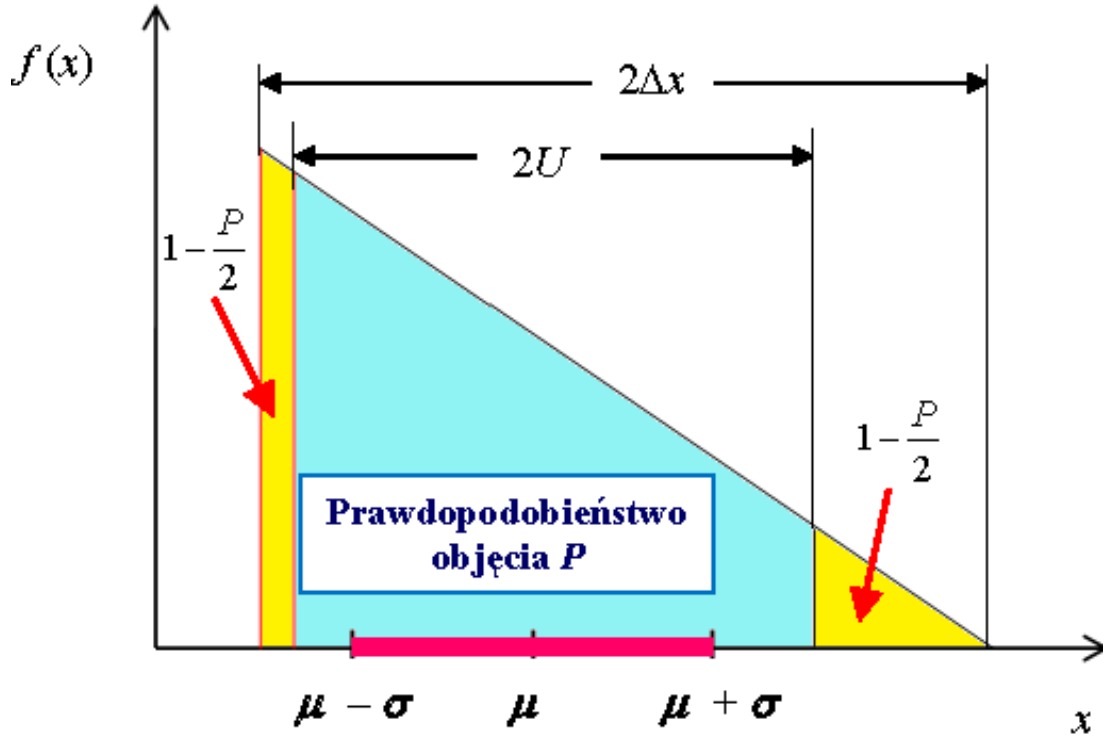
Przedział ufności

Prawdopodobieństwo α nazywane jest
poziomem istotności
a odpowiadający mu obszar nazywa się **obszarem krytycznym**

UWAGA: W *Poradniku* …
jako odpowiednik tradycyjnych pojęć, GUM przyjął konwencję,
gdzie stosuje się:
przedział objęcia zamiast *przedział ufności*
prawdopodobieństwo objęcia zamiast *poziom (współczynnik) ufności*

Rys. wykonano na podstawie rys. A3 z: A. Zięba: Analiza danych … . PWN, Warszawa 2014.

Ilustracja różnych parametrów skali



Rys. wykonany na podstawie rys. A3 z: A.Zięba: *Analiza danych* ... . PWN, Warszawa 2014.

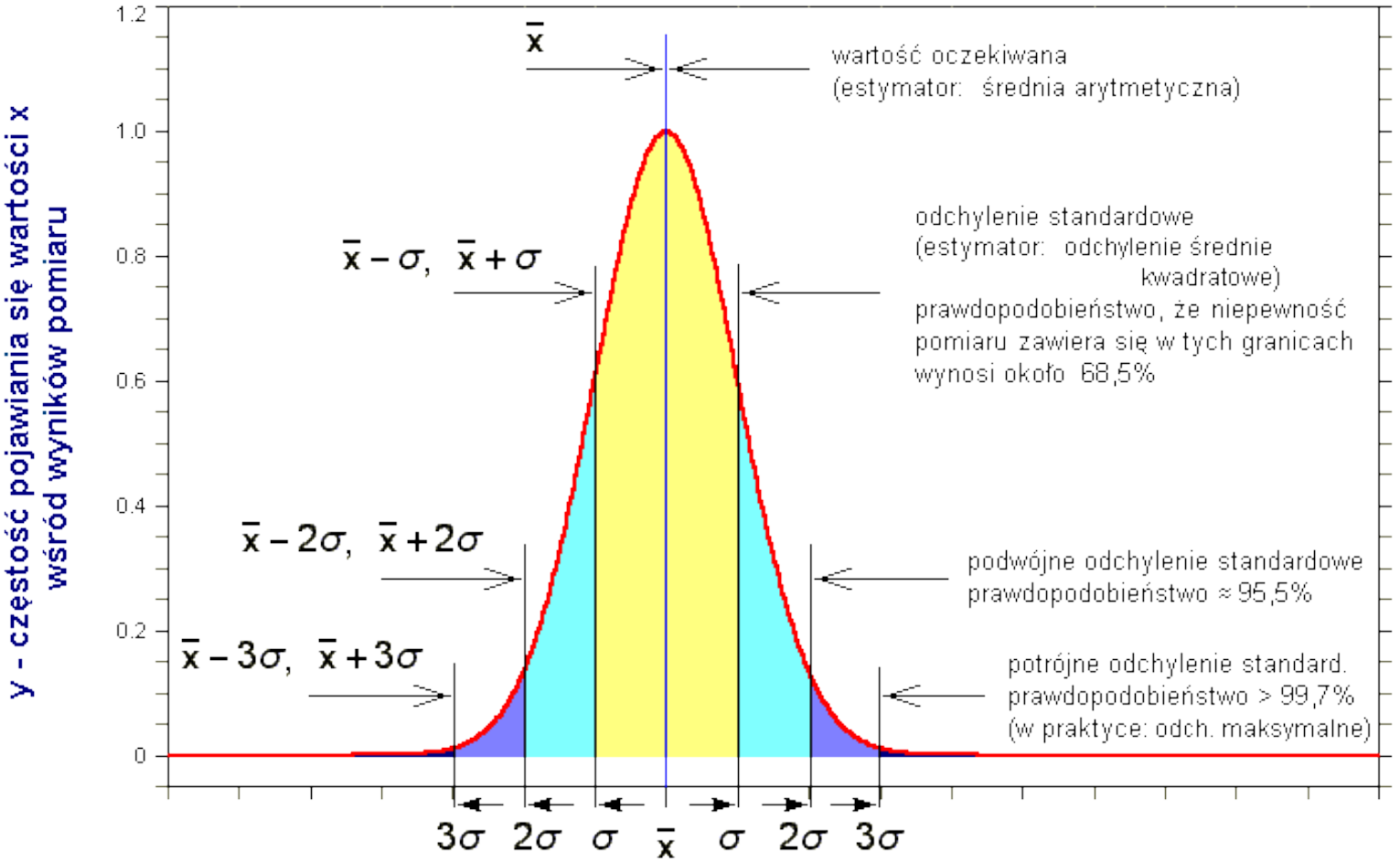
Δx – odchylenie graniczne

U* – połowa szerokości przedziału objęcia, odpowiada: *niepewność rozszerzona

Dla każdego rozkładu symetrycznego, dla którego istnieje odchylenie standardowe, przedział objęcia (x_a, x_b) możemy określić jako

$$(\mu - k\sigma, \mu + k\sigma)$$

Jeśli $k = 2$ to $P \approx 0{,}95$.



Źródło: http://marpaw.elisa.pl/wsti/roznosci/error/gauss_b.gif

W przedziale

$$\bar{x} - \sigma < x < \bar{x} + \sigma \quad \text{zawiera się} \quad 68{,}269\,\%$$

$$\bar{x} - 2\sigma < x < \bar{x} + 2\sigma \quad \text{zawiera się} \quad 95{,}450\,\%$$

$$\bar{x} - 3\sigma < x < \bar{x} + 3\sigma \quad \text{zawiera się} \quad 99{,}994\,\%$$

wszystkich wyników

Punkt przegięcia krzywej znajduje się w odległości $1\,\sigma$ od średniej

NIEPEWNOŚĆ ROZSZERZONA

przypomnienie

Na potrzeby wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru z innymi rezultatami Międzynarodowa Norma wprowadza pojęcie NIEPEWNOŚCI ROZSZERZONEJ $U(x)$
i WSPÓŁCZYNNIKA ROZSZERZENIA k.

NIEPEWNOŚĆ ROZSZERZONA wynosi $U(x) = k \cdot u(x)$ i określa przedział $\pm U(x)$ otaczający wynik pomiaru, w którym zawiera się duża, z góry określona część wyników, jakie można przypisać wielkości mierzonej.
Typowe wartości współczynnika rozszerzenia k mieszczą się w przedziale między 2 a 3.

Szacowanie parametrów metodą przedziałową

Ogólny schemat postępowania w procedurze szacowania parametrów metodą przedziałową można ująć w następujących punktach:

1) z populacji generalnej losowana jest próba statystyczna,
2) na podstawie wyników uzyskanych z próby ustalana jest wartość estymatora odpowiedniego dla szacowanego parametru estymowanego,
3) zakładany jest poziom ufności uwzględniający wynikające z tego faktu konsekwencje w postaci określonej precyzji szacowania parametru estymowanego,
4) z tablic statystycznych odpowiedniego rozkładu odczytywana jest właściwa dla przyjętego poziomu ufności wartość statystyki teoretycznej ,
5) uzyskane dla próby wartości odpowiednich parametrów oraz odczytana z tablic wielkość statystyki teoretycznej wstawiane są do odpowiedniej formuły szacowania przedziału ufności dla określonego parametru estymowanego; przedział ten zostaje określony poprzez wyznaczenie jego dolnej i górnej granicy.

Rozkład Studenta

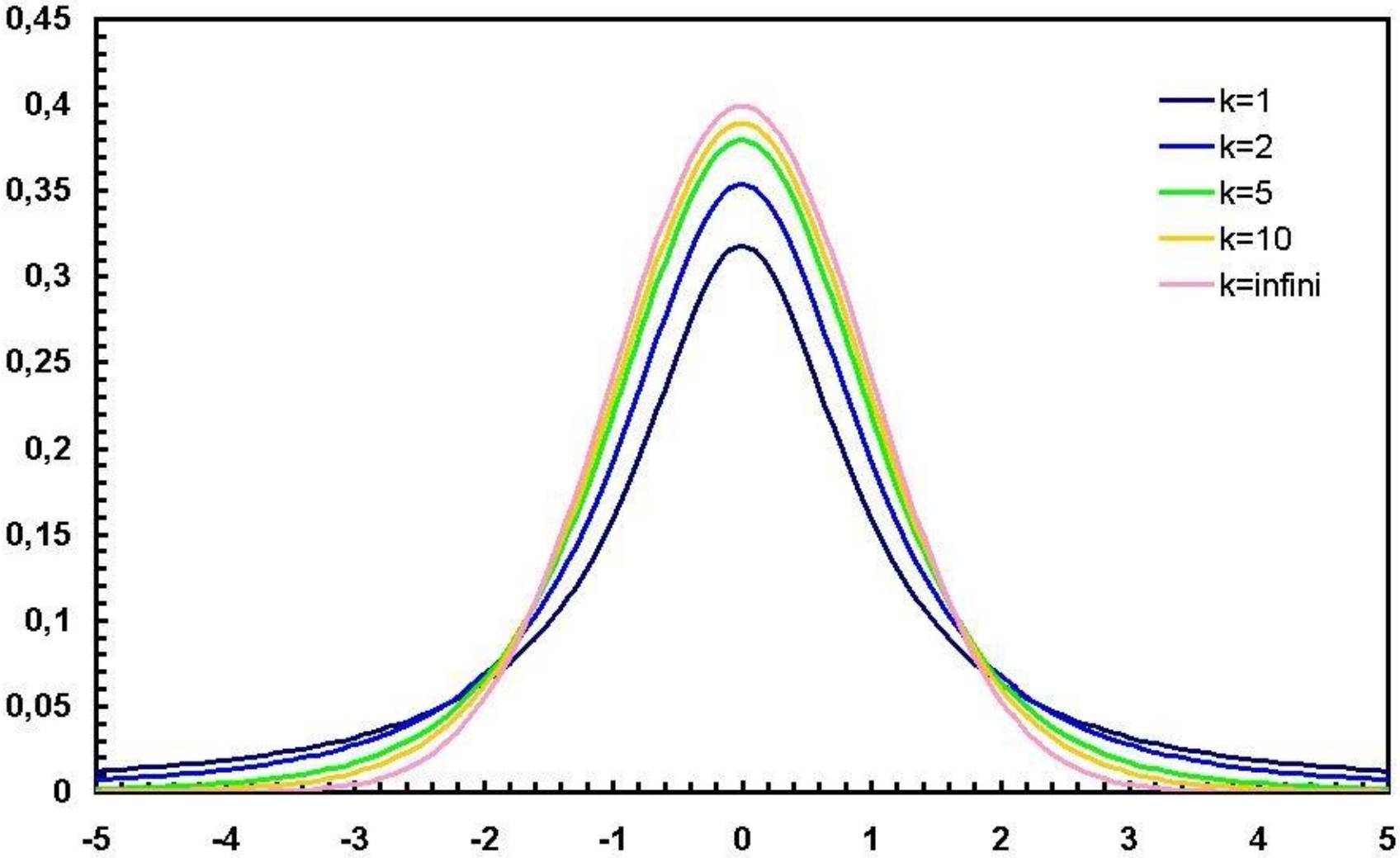
(rozkład t lub rozkład t-Studenta)

Rozkład normalny nie stanowi dobrego przybliżenia rozkładu wyników w przypadku małych prób ($n < 30$). Odchylenia od wartości rzeczywistej w takiej próbie są większe niż te przewidywane rozkładem normalnym.
Dobry rozkład wyników pomiarów opisuje tzw. funkcja rozkładu t-Studenta.

Przy opracowaniu wyników pomiarów często powstaje zagadnienie oszacowania przedziału, w którym leży, z określonym prawdopodobieństwem, rzeczywista wartość mierzona, jeśli dysponujemy tylko wynikami n pomiarów, dla których możemy wyznaczyć takie parametry, jak średnia i odchylenie standardowe lub wariancja („z próby"), nie znamy natomiast odchylenia standardowego w populacji.
Zagadnienie to rozwiązał (w 1908 r.) W. S. Gosset (pseudonim Student) podając funkcję zależną od wyników pomiarów x_i,
a niezależną od σ.

Rozkład Studenta

(rozkład t lub rozkład t-Studenta)



Źródło: Wikipedia

Model dla małej próby

Mała próba - przyjmuje się traktować próbę o liczebności $n < 30$.

Estymatorem dla oszacowania wartości średniej w populacji generalnej jest średnia z próby $\bar{x}$

Przyjmuje się założenie, że rozkład badanej zmiennej w populacji generalnej ma charakter rozkładu normalnego.

Z populacji tej losowana jest próba i na podstawie uzyskanych z niej danych wyznaczana jest wartość średnia i odchylenie standardowe .

Z góry zakładany jest poziom ufności. Przedział ufności dla wartości średniej w populacji generalnej szacowany jest według wzoru:

$$\bar{x} - t_t \cdot \frac{s(x)}{\sqrt{n-1}} < E(x) < \bar{x} + t_t \cdot \frac{s(x)}{\sqrt{n-1}}$$

Występująca w powyższym wzorze wielkość t_t jest wartością statystyki odczytywaną z tablic rozkładu t-Studenta dla $v = n - 1$ oraz $1 - \alpha$.

Uzyskany przedział z prawdopodobieństwem równym poziomowi ufności pokrywa nieznaną wartość średnią w populacji generalnej.

Warto zwrócić uwagę, iż otrzymany przedział jest symetryczny względem średniej z próby.

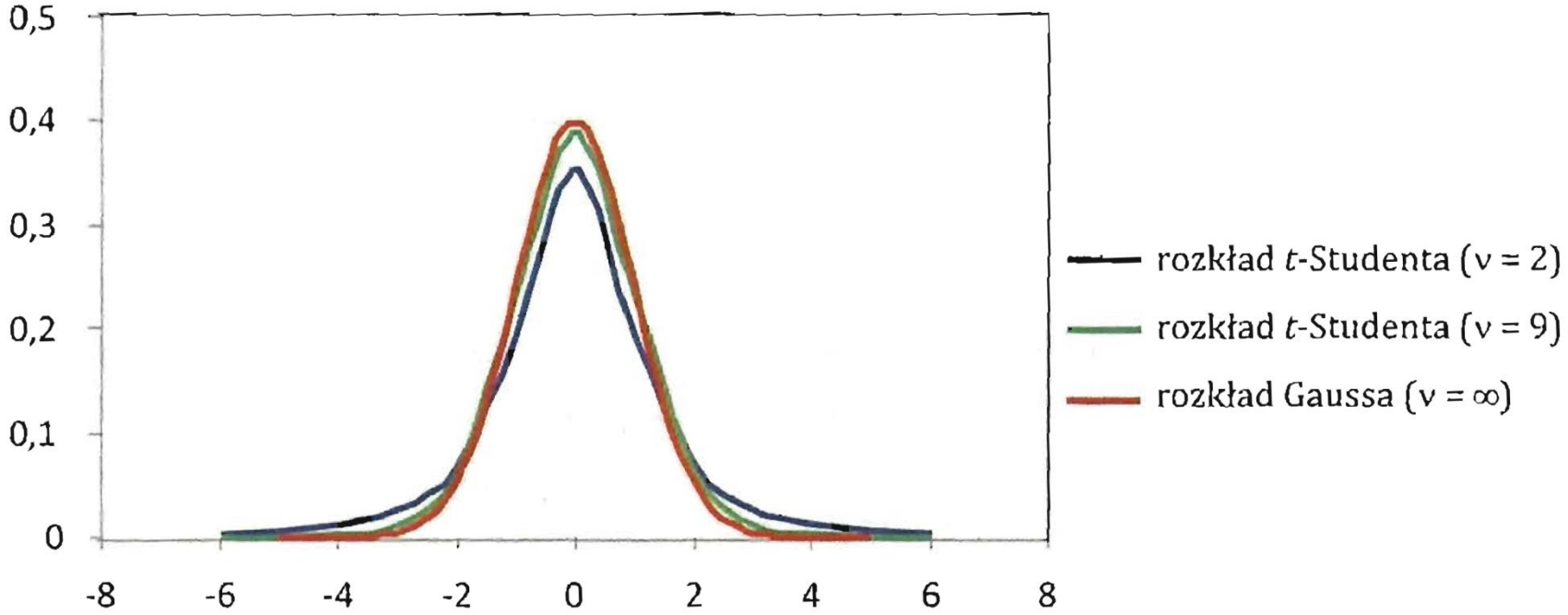
Model dla małej próby

Przedział ufności dla wartości średniej w populacji generalnej szacowany jest też według wzoru:

$$\bar{x} - t_{\nu,\alpha} \cdot s_{\bar{x}} \leq E(x) \leq \bar{x} + t_{\nu,\alpha} \cdot s_{\bar{x}}$$

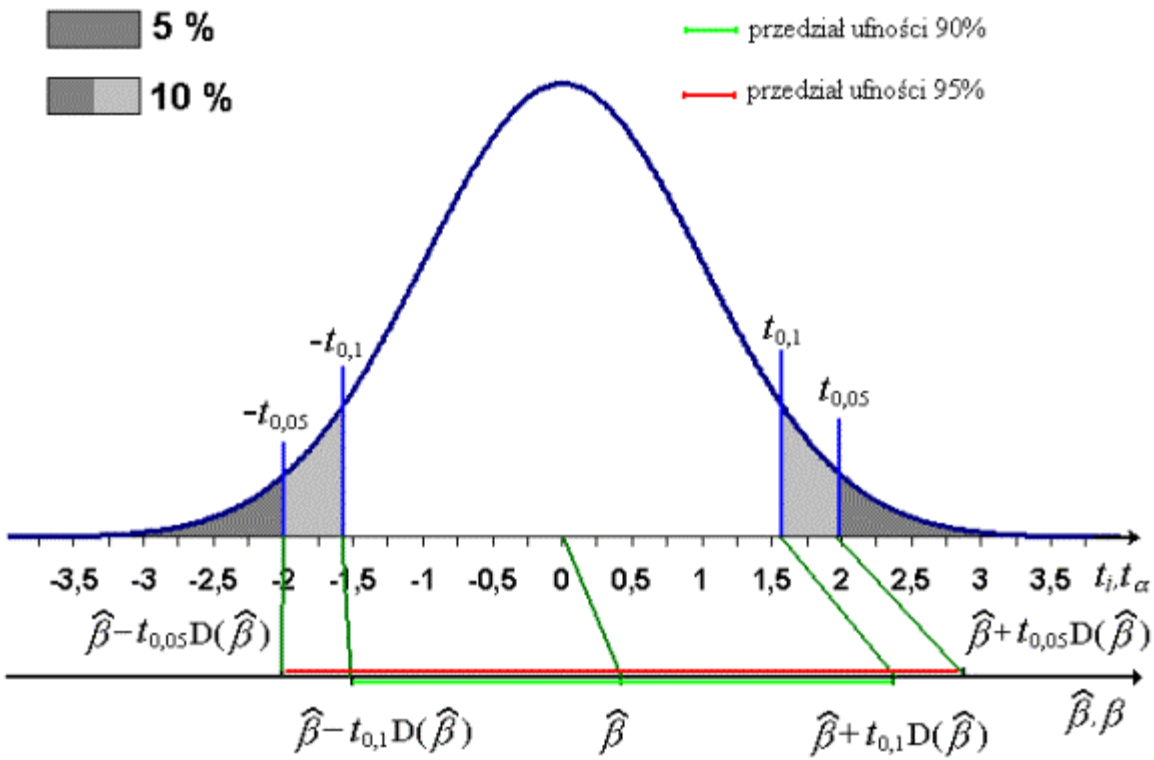
gdzie współczynnik $t_{\nu,\alpha}$ – *wartości krytyczne rozkładu t-Studenta* (tablice, arkusz kalk.).

UWAGA: Błędna byłaby interpretacja, że szacowana średnia znajduje się w uzyskanym przedziale z prawdopodobieństwem równym α, ponieważ to przedział jest zmienny, a nie szacowana wartość średnia (ona jest wielkością stałą).
Uwaga ta dotyczy estymacji wszelkich parametrów szacowanych metodą przedziałową.



Rys. Porównanie rozkładu *t*-Studenta z rozkładem Gaussa.
(W nawiasach v – liczba stopni swobody.)

Rys. zaczerpnięto z: P. Bilski, M. Dobies, A. Kozak, M. Makrocka-Rydzyk, *Materiały do ćwiczeń ze wstępu do pracowni fizycznej. Normy ISO i matematyka w laboratorium*. Wyd. Naukowe UAM; 2014.



Rys. Przedziały ufności dla różnych wartości rozkładu *t*-Studenta

Rys. znaleziony w sieci.

ν	$1-\alpha$								
	0,8	**0,6**	**0,4**	**0,2**	**0,1**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	636,578
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	31,6
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,61
5	0,267	0,559	0,92	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,265	0,553	0,906	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,262	0,546	0,889	**1,397**	1,86	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,781
10	0,26	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
20	0,257	0,533	0,86	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,85
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,06	2,485	2,787	3,725
30	0,256	0,53	0,854	1,31	1,697	2,042	2,457	2,75	3,646
35	0,255	0,529	0,852	1,306	1,69	2,03	2,438	2,724	3,591
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551

Tablica. Współczynniki rozkładu *t*-Studenta

Znając estymatory punktowe rozkładu wartości średniej, otrzymane z próby o małej liczebności (tj. $E(x) = \bar{x}$ i $\sigma = s_{\bar{x}}$) oraz korzystając z wartości krytycznych rozkładu *t*-Studenta Przedział ten określa się następująco

$$P\{\bar{x} - t_{\nu,\alpha} \cdot s_{\bar{x}} \le E(x) \le \bar{x} + t_{\nu,\alpha} \cdot s_{\bar{x}}\} = 1 - \alpha$$

gdzie $\bar{x} - t_{\nu,\alpha} \cdot s_{\bar{x}} \le E(x) \le \bar{x} + t_{\nu,\alpha} \cdot s_{\bar{x}}$

przedział objęcia (*przedział ufności*)

$1 - \alpha$ prawdopodobieństwo objęcia (*poziom* (*współczynnik*) *ufności*)

α – ***poziom istotności***

Zgodnie z zaleceniami norm ISO estymację przedziałowa wykonuje się na poziomie ufności $1 - \alpha = 0{,}9545$, czyli dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}0455$, dla którego wsp. $t_{\infty,\, 0{,}0455} = 2$ (obszar 2σ) .

Przykład

Na wadze laboratoryjnej zważono 9 razy masę metalowego walca. Wyniki pomiarów masy walca zapisane są w tabeli

Lp.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
***m*, g**	**54,9**	**54,2**	**54,6**	**54,7**	**54,2**	**54,7**	**54,4**	**54,6**	**54,2**

$\overline{m} = 54{,}5\ \text{g}, \quad s_m = 0{,}2598\ \text{g}, \quad s_{\overline{m}} = 0{,}0866\ \text{g}$

Wykonać estymację przedziałową dla wartości średniej mas walców, przyjmując następujący przedział ufności: $\mathbf{1 - \alpha = 0{,}8.}$

Rozwiązanie

Z tablicy zawierającej wartości krytyczne współczynników rozkładu *t*-Studenta odczytujemy współczynniki $t_{\nu,\alpha}$ dla liczby stopni swobody $\nu = n - 1 = 9 - 1 = 8$ oraz poziomu ufności $1 - \alpha = 0{,}8$ czyli poziomu istotności $\alpha = 0{,}2$ który wynosi $t_{8;\,0{,}2} = 1{,}397$.

Aby określić przedział ufności dla wartości średniej masy walca, należy znaleźć wartości graniczne tego przedziału, które na podstawie wzoru

$$P\{\bar{x} - t_{v,\alpha} \cdot s_{\bar{x}} \le E(x) \le \bar{x} + t_{v,\alpha} \cdot s_{\bar{x}}\} = 1 - \alpha$$

można zapisać jako $\overline{m} \pm t_{8;0,2} \cdot s_{\overline{m}}$.

Obliczamy wartość liczbową

$$\{t_{8;0,2} \cdot s_{\overline{m}}\} = 1{,}397 \cdot 0{,}0866 = 0{,}12098 \approx 0{,}12$$

Znajdujemy granice przedziału ufności

dolną $\{\overline{m} - t_{8;0,2} \cdot s_{\overline{m}}\} = 54{,}50 - 1{,}397 \cdot 0{,}0866 = 54{,}379 \approx 54{,}38$

i górną $\{\overline{m} + t_{8;0,2} \cdot s_{\overline{m}}\} = 54{,}50 + 1{,}397 \cdot 0{,}0866 = 54{,}621 \approx 54{,}62$

Wartość oczekiwana średniej masy walca $E(\overline{m})$
zawiera się z prawdopodobieństwem $1 - \alpha = 0{,}8$ w przedziale

$$54{,}38\ \text{g} \le E(\overline{m}) \le 54{,}62\ \text{g}$$

Możemy to zwięźle zapisać

$$P\{54{,}38\ \text{g} \le E(\overline{m}) \le 54{,}62\ \text{g}\} = 0{,}8$$

Przedziałowe kryterium zgodności wyników pomiarów

Budujemy przedział domknięty dla wyniku eksperymentalnego w postaci

$$\Theta = \left\langle \bar{x} - U(\bar{x});\ \bar{x} + U(\bar{x}) \right\rangle$$

Budujemy przedział domknięty dla wartości tablicowej w postaci

$$\Theta^{\mathrm{T}} = \left\langle x^{\mathrm{T}} - U(x^{\mathrm{T}});\ x^{\mathrm{T}} + U(x^{\mathrm{T}}) \right\rangle$$

Sprawdzamy, czy istnieje część wspólna obu przedziałów.
Jeżeli istnieje to wyniki są zgodne, wówczas spełniona jest następująca nierówność

$$\left| \bar{x} - x^{\mathrm{T}} \right| \le U(\bar{x}) + U(x^{\mathrm{T}})$$

Ta relacja to: kryterium zgodności wyników pomiarów

Uwaga: zdarza się, że ta nierówność jest spełniona dla niepewności standardowych. Wówczas nie ma potrzeby sprawdzać dla niepewności standardowej rozszerzonej.

Przegląd - podsumowanie
Model losowy

Przewodnik wprowadza dwa podstawowe parametry niepewności. Są to:

- **niepewność standardowa** (*standard uncertainty*) - zdefiniowana przez „niepewność wyniku pomiaru wyrażoną jako odchylenie standardowe";
- **niepewność rozszerzona** (*expanded uncertainty*) - zdefiniowana przez „wielkość określającą przedział wokół wyniku pomiaru, taki że można oczekiwać, iż obejmie on dużą część wartości, które w uzasadniony sposób można przyporządkować wielkości mierzonej."

2.3.1

standard uncertainty - uncertainty of the result of a measurement expressed as a standard deviation

2.3.5

expanded uncertainty *- quantity defining an interval about the result of a measurement that may be expected to encompass a large fraction of the distribution of values that could reasonably be attributed to the measurand*

Przegląd - podsumowanie
Model losowy

Istotnym problemem przy szacowaniu niepewności pomiarów w modelu losowym jest łączenie składników niepewności.

Proces ten przebiega w następujących etapach:

- oszacowanie niepewności standardowej typu A (rozkład gaussowski), przy wykorzystaniu odchylenia standardowego próbki nie mniejszej niż 10 pomiarów;
- oszacowanie składowej niepewności standardowej typu B (rozkład nie-gaussowski);
- połączenie niepewności typu A i B, by dać niepewność rozszerzoną przy określonym poziomie ufności:

$$U(x) = k\sqrt{\sigma^2 + \frac{\left(\Delta_{s\max} x\right)^2}{3}}$$

Przegląd - podsumowanie
Model losowy

Niepewność rozszerzoną oblicza się przez pomnożenie pierwiastka sumy kwadratów niepewności typu A* (rozkład gaussowski) i typu B (nie-gaussowski) przez współczynnik rozszerzenia *k*, określonego dla konkretnego poziomu ufności.**

* *Przewodnik*, 4.2

** *Przewodnik*, 4.3

wsp. ***k*** (zależny od liczby pomiarów oraz poziomu ufności α)

Przegląd - podsumowanie
Model losowy

W praktyce laboratoryjnej będziemy stosować następujące zależności:

-odchylenie standardowe poszczególnego wyniku pomiaru (*Przewodnik*, 4.2.2):

$$S(x_i) \equiv S_{x_i} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- odchylenie standardowe średniej arytmetycznej (*Przewodnik*, 4.2.3):

$$S(\bar{x}) \equiv S_{\bar{x}} = \frac{S_{x_i}}{\sqrt{n}}$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Przegląd - podsumowanie
Model losowy

Tak więc, dla skończonej serii pomiarów mamy:

$$\hat{x} = \bar{x} \pm t_{n,\alpha} \cdot S_{\bar{x}}$$

gdzie:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Przegląd – podsumowanie
Szacowanie błędów i niepewności pomiarów pośrednich

Kompletny wynik pomiaru składa się z:

- estymaty wartości wielkości mierzonej,
- miary niedokładności,
- mnożnika (jeżeli jest potrzebny),
- jednostki wielkości mierzonej.

Zapisanie kompletnego wyniku pomiaru

Należy stosować się do następujących zasad:

- estymata wartości i jej graniczny błąd bezwzględny wyraża się w tym samym formacie, przyjmując dla błędu (niepewności) jedną lub dwie cyfry znaczące;
- przyjmujemy dwie cyfry znaczące niepewności w przypadku gdy jej zaokrąglenie do jednej cyfry znaczącej spowodowałoby wzrost wartości tej niepewności o więcej niż 10 %;
- graniczny błąd bezwzględny zaokrąglamy zawsze „w górę”;
- wynik pomiaru zaokrąglamy w sposób „klasyczny”;
- Ostatnia cyfra znacząca w każdym wyniku powinna być tego samego rzędu (stać na tym samym miejscu dziesiętnym) co błąd.

Zapisanie kompletnego wyniku pomiaru

Przykład:

$R = (135{,}572489 \pm 0{,}046963)\ \Omega$ - źle!!!

$R = (135{,}57 \pm 0{,}05)\ \Omega$ - dobrze!!!

$m = (1{,}58997671 \pm 0{,}01341799)$ kg - źle!!!

$m = (1{,}590 \pm 0{,}014)$ kg - dobrze!!!

$d = (0{,}0037688631 \pm 0{,}000011782)$ m – źle!!!

$d = (3{,}769 \pm 0{,}012) \cdot 10^{-3}$ m – dobrze!!!

PRZYKŁAD ZALECANEGO SPOSOBU ZAPISU NIEPEWNOŚCI

NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA

$g = 9{,}781\ \mathrm{m/s^2}$ $u(g) = 0{,}076\ \mathrm{m/s^2}$

$g = 9{,}781(76)\ \mathrm{m/s^2}$

NIEPEWNOŚĆ ROSZERZONA

$g = 9{,}78\ \mathrm{m/s^2}$ $U(g) = 0{,}15\ \mathrm{m/s^2}$

$g = (9{,}78 \pm 0{,}15)\ \mathrm{m/s^2}$

Przegląd – podsumowanie
Pomiary w Pracowni Fizycznej

- Każdy pomiar w laboratorium jest obarczony niepewnością pomiarową, którą eksperymentator musi określić zgodnie z pewnymi zasadami.
- W pierwszej kolejności należy przeanalizować źródła błędów, pamiętając, aby wyeliminować wyniki obarczone błędem grubym. W laboratorium studenckim błędy systematyczne z reguły przewyższają błędy przypadkowe.
- Wielokrotne powtarzanie pomiarów, gdy dominuje błąd systematyczny, nie ma sensu. W takim przypadku dokonujemy tylko 3-5 pomiarów w tych samych warunkach w celu sprawdzenia powtarzalności.

Powtórzenia

Niepewność standardowa pomiaru

Niepewność standardowa *u* – niepewność wyrażona w formie odchylenia standardowego.

Niepewność standardowa złożona u_c – niepewność standardowa wyniku pomiaru, gdy wynik ten jest otrzymany z wartości pewnej liczby innych wielkości (w pomiarze pośrednim).

Niepewność rozszerzona *U* to wielkość powiązana z pewnym poziomem ufności

$$U = k\,u$$

OCENA NIEPEWNOŚCI TYPU A W POMIARACH BEZPOŚREDNICH

1. Wykonujemy serię (skończoną) pomiarów
2. Wielkością najbardziej prawdopodobną jest średnia arytmetyczna :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

3. Niepewność standardowa pojedynczego pomiaru $u(x)$ (tzw. odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru S_x)

$$u(x) = S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Eksperymentatora bardziej interesuje niepewność wyniku czyli wartości średniej

Niepewność standardowa średniej:

$$u(\bar{x}) = S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

OCENA NIEPEWNOŚCI METODĄ TYPU B

Najczęstszym przykładem oceny niepewności metodą typu B jest wyznaczenie niepewności wynikającej z dokładności przyrządu (niepewności wzorcowania). Przyrząd pomiarowy powinien gwarantować taką dokładność aby wynik pomiaru x różnił się od wartości rzeczywistej nie więcej niż o działkę elementarną - $\Delta_p x$. Wiemy, że odchylenie wyniku pomiaru *x* od wartości rzeczywistej nie wykracza poza przedział $\pm\Delta_p x$ tzn. wartość rzeczywista zawiera się na pewno w przedziale $(x - \Delta_p x\ ,\ x + \Delta_p x)$.

W najprostszym przypadku możemy przyjąć, że prawdopodobieństwo uzyskania dowolnej wartości z tego przedziału jest takie samo – tzn. opisuje je rozkład równomierny (jednorodny). Jeżeli skorzystamy ze wzoru na dyspersję rozkładu równomiernego to otrzymamy następujące wyrażenie na niepewność standardową:

$$u(x) = \frac{\Delta_p x}{\sqrt{3}}$$

OCENA NIEPEWNOŚCI METODĄ TYPU B
NIEPEWNOŚĆ CAŁKOWITA

Przyczynkami niepewności pomiarów są
niepewność wzorcowania $\Delta_d x$,
niepewność eksperymentatora $\Delta_e x$
oraz niepewności wyników zaczerpniętych z literatury, tablic matematycznych lub kalkulatora $\Delta_t x$.

Wówczas niepewność standardowa powinna być obliczona ze wzoru

$$u(x) = \sqrt{\frac{(\Delta_d x)^2}{3} + \frac{(\Delta_e x)^2}{3} + \frac{(\Delta_t x)^2}{3}}$$

NIEPEWNOŚĆ STANDARDOWA POMIARÓW POŚREDNICH

Niepewność standardową dla pomiarów pośrednich nieskorelowanych oblicza się ze wzoru:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i)}$$

Natomiast w celu wyznaczenia niepewność standardowej dla pomiarów pośrednich skorelowanych należy uwzględnić korelacje zachodzące pomiędzy wielkościami mierzonymi bezpośrednio:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r(x_i, x_j)}$$

NIEPEWNOŚĆ CAŁKOWITA

W przypadku gdy występują obydwa typy niepewności równocześnie wyznaczamy STANDARDOWĄ NIEPEWNOŚĆ CAŁKOWITĄ (złożoną) wykorzystując prawo propagacji niepewności.

$$u_c(x) = \sqrt{\left[u_A(x)\right]^2 + \left[u_B(x)\right]^2}$$

gdzie:
$u_c(x)$ – niepewność całkowita,
$u_A(x)$ – niepewność obliczona z rozrzutu statystycznego serii wyników pomiarów,
$u_B(x)$ – niepewność obliczona inną drogą niż z rozrzutu wyników.

Prawo propagacji niepewności w powyższej formie wynika z prawa propagacji wariancji. Ponadto powyższy wzór zakłada, że czynniki odpowiedzialne za oba typy niepewności są od siebie niezależne.

NIEPEWNOŚĆ CAŁKOWITA

Jeśli obydwa typy niepewności, A i B, występują równocześnie, to należy posłużyć się następującym wzorem na niepewność standardową (całkowitą):

$$u(x) = \sqrt{u_{\mathrm{A}}^2(x) + u_{\mathrm{B}}^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + \frac{(\Delta_{\mathrm{d}} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_{\mathrm{e}} x)^2}{3} + \frac{(\Delta_{\mathrm{t}} x)^2}{3}}$$

NIEPEWNOŚĆ ROZSZERZONA

Na potrzeby wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru
z innymi rezultatami *Międzynarodowa Norma* wprowadza pojęcie
NIEPEWNOŚCI ROZSZERZONEJ $U(x)$
i WSPÓŁCZYNNIKA ROZSZERZENIA k.

NIEPEWNOŚĆ ROZSZERZONA wynosi

$$\boldsymbol{U(x) = k \cdot u(x)}$$

i określa przedział $\pm \boldsymbol{U(x)}$ otaczający wynik pomiaru,
w którym zawiera się duża, z góry określona część wyników, jakie
można przypisać wielkości mierzonej.
Typowe wartości *współczynnika rozszerzenia k*
mieszczą się w przedziale między 2 a 3.

Bibliografia podstawowa i uzupełniająca wybrana

1. ***Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, Switzerland 1995.**

   ***The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty*,**

   http://**physics.nist.gov/cuu**/Uncertainty/index.html

   ***Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999.**

2. **A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technicznych.* PWN, Warszawa, 2014.**
3. **P. Bilski, M. Dobies, A. Kozak, M. Makrocka-Rydzyk, *Materiały do ćwiczeń ze wstępu do pracowni fizycznej. Normy ISO i matematyka w laboratorium*. Wyd. Naukowe UAM; 2014.**
4. **H. Szydłowski, *Niepewności w pomiarach. Międzynarodowe standardy w praktyce*. Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.**
5. **R. Janiczek, *Metody oceny niepewności pomiarów.* Wyd. Prac. Komputerowej Jacka Skalmierskiego. Katowice-Gliwice 2008.**
6. **E. Dębowska, *MĘDZYNARODOWE NORMY OCENY NIEPEWNOŚCI POMIARÓW*. IFD UWr., Wrocław 2003 (plik).**
7. **H. Szydłowski (red), *Teoria pomiarów*. PWN, Warszawa 1981**
8. **H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*. PWN, Warszawa 1999.**
9. **J.R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*. PWN , Warszaa 1995.**
10. **G. L. Squires, *Praktyczna fizyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1992.**
11. **J. L. Kacperski, *Opracowanie danych pomiarowych*, Wyd. UŁ, Łódź 1997.**
12. **Elektroniczny Podręcznik Statystyki PL, Kraków, StatSoft (2006). WEB: http://www.statsoft.pl/textbook/stathome.html.**

Odnośniki do stron www

Andrzej Zięba:

Rozdz. 1. Opracowanie danych pomiarowych:

http://www.ftj.agh.edu.pl/zdf/danepom.pdf

Rozdz. 1. Opracowanie danych pomiarowych;

Rozdz. 2. Pomiar: liczby i obliczenia liczbowe

http://cyfroteka.pl/ebooki/Analiza_danych_w_naukach_scislych_i_technice-ebook/p0402791i040#Darmowy-fragment

R.Janiczek, ***Metody oceny niepewności pomiarów.***

Wyd. Prac. komputerowej Jacka Skalmierskiego, Katowice-Gliwice 2008

Rys. 6. Ogólne zalecenia określenia wartości współczynnika rozszerzenia *k*

http://chip.wiora.pl/science/pan/files/Streszczenia/2007%20IV%2020%20-%20str%20ref%20-%20R%20Janiczek.doc